La criba de Eratóstenes y la función π(n): Una propuesta pedagógica.

Yasser A. Chavez

Resumen. Una propuesta pedagógica para el estudio de los números primos, superando el estancamiento didáctico que ha rodeado a la criba de Eratóstenes por más de dos milenios. A través de la implementación de un enfoque basado en el pensamiento algorítmico y el ecosistema e-learning actual, se introduce una optimización de la criba mediante la biyección de índices y la aplicación de la "rueda-6", logrando reducir significativamente la complejidad operativa en comparación con los métodos tradicionales. Asimismo, el trabajo propone un camino lúdico y experimental hacia la función π(n), permitiendo que el estudiante descubra la distribución de los primos y la constante de Legendre de manera intuitiva, conectando conceptos fundamentales de la teoría de números con la programación moderna.

caricatura de Adrien-Marie Legendre

By Julien-Léopold Boilly

1 Introducción

La búsqueda de números primos, cuyas bases formales sentaron los griegos entre los siglos VI y III a. C. gracias a Pitágoras, Euclides, Eratóstenes y Diofanto, produjo uno de los procedimientos didácticos más perdurables: la criba de Eratóstenes. Sin embargo, su arraigada vigencia ha frenado el desarrollo de innovaciones pedagógicas para este método.

La pregunta sobre la ausencia de innovaciones es fácil de responder. Es bien sabido que el desarrollo de las matemáticas estuvo estancado durante más de 1500 años. Este periodo concluyó con los matemáticos del Renacimiento, quienes prepararon el terreno para el siglo XVII. Este último puede considerarse el inicio de la desenfrenada carrera hacia el rigor matemático, en la cual el estatus del matemático comenzó a medirse por sus publicaciones.

Por lo que tuvieron que pasar varios siglos hasta llegar al siglo XX, donde la matemática vomitaría a Kurt Gödel, el cual, entre vómito, vociferó sus teoremas de incompletitud, haciendo que se reflexionara sobre cómo se digieren los contenidos matemáticos; por lo que se puede decir que aquí es cuando nace la didáctica de las matemáticas.

El siguiente periodo de transición del pensamiento matemático tiene su origen entre 1940 y 1957, con el nacimiento de los lenguajes Ensamblador y Fortran. El primero se comunica directamente con la máquina, y el segundo es un lenguaje de alto nivel (una interfaz intuitiva para el ser humano). Con la llegada de la programación llegaron las estructuras de datos, cuya base procede, en algunos casos, de la teoría de conjuntos.

El primer lenguaje pensado para el aprendizaje fue Logo (1967), que consistía en dar órdenes a una tortuga que iba dejando líneas al caminar. Sin embargo, durante el siglo XX, la programación aún no priorizaba la educación básica, por lo que era imposible que cualquier propuesta fundamentada en el pensamiento de la programación pudiera sostenerse.

La revolución digital se consolida en el siglo XXI con lenguajes como Scratch (2007), enfocados en el aprendizaje de la programación y dirigidos a los grados escolares previos a la universidad. El movimiento e-learning crea un ecosistema de aprendizaje en línea, proporcionando por primera vez una red capaz de sostener iniciativas didácticas fundamentadas en el pensamiento del siglo XX.

Por lo tanto, el enfoque que presentaremos sobre la criba de Eratóstenes en este trabajo se fundamenta en el pensamiento de mediados del siglo XX, pero solo puede sostenerse gracias al ecosistema actual del e-learning, donde el pensamiento algorítmico y computacional puede desarrollarse en etapas tempranas. Con esto, damos respuesta a por qué tuvieron que pasar más de 2000 años para que surgieran innovaciones didácticas en la criba.

2 Optimización de la criba

Una optimización trivial que podemos aplicarle a la criba es trabajar solo con los números impares, aunque, en esencia, el procedimiento sigue siendo el mismo si mantenemos el algoritmo inicial.

Por lo tanto, si realmente queremos optimizar la criba, debemos establecer la siguiente biyección:

$$f : I_n \rightarrow A$$

$$-I_n \text{ es un intervalo de } \mathbb{N}$$
$$-A \text{ es el conjunto de numéros impares}$$

Podemos repensar esta biyección desde la programación, donde el dominio de la función f son los índices de una lista y su codominio son los elementos (números impares) de esta.

Notemos que $f(n) = 2n\text{-}1$ pero dado que no nos interesa trabajar directamente con los números impares usaremos la inversa de la función que nos devuelve los indices es decir $f^{-1}(n) = (n+1)/2$.

Aunque no es natural la idea de trabajar únicamente con los índices, es innegable que estos hacen visibles los patrones de la criba de Eratóstenes. Suele decirse que se "tache desde el cuadrado del número", lo cual es un resultado trivial; sin embargo, en la siguiente tabla podemos observar patrones de simetría en forma de L girada 90 grados a la derecha. Los índices $(5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181)$ corresponden, precisamente, a los cuadrados de los números impares.

Criba-$f^{-1}(n)$

n	$f^{-1}(3n)$	$f^{-1}(5n)$	$f^{-1}(7n)$	$f^{-1}(9n)$	$f^{-1}(11n)$	$f^{-1}(13n)$	$f^{-1}(15n)$	$f^{-1}(17n)$	$f^{-1}(19n)$
3	5	8	11	14	17	20	23	26	29
5	8	13	18	23	28	33	38	43	48
7	11	18	25	32	39	46	53	60	67
9	14	23	32	41	50	59	68	77	86
11	17	28	39	50	61	72	83	94	105
13	20	33	46	59	72	85	98	111	124
15	23	38	53	68	83	98	113	128	143
17	26	43	60	77	94	111	128	145	162
19	29	48	67	86	105	124	143	162	181

Criba-$f^{-1}(n)$ (optimizada)

n	$f^{-1}(3n)$	$f^{-1}(5n)$	$f^{-1}(7n)$	$f^{-1}(9n)$	$f^{-1}(11n)$	$f^{-1}(13n)$	$f^{-1}(15n)$	$f^{-1}(17n)$	$f^{-1}(19n)$
3	5	8	11	14	17	20	23	26	29
5		13	18	23	28	33	38	43	48
7			25	32	39	46	53	60	67
11					61	72	83	94	105
13						85	98	111	124
17								145	162
19									181

Notemos que $f^{-1}(3\cdot3) = 5,\ f^{-1}(3\cdot5) = 8$ y $f^{-1}(5\cdot3) = 8$. Por lo tanto, podemos empezar a tachar los números 9 y 15, o directamente omitir sus múltiplos. Siguiendo esta misma lógica con los demás números, solo tendríamos que listar los números primos.

Si bien hubiéramos obtenido los mismos resultados trabajando directamente con los múltiplos de los números impares, esto nos lleva a preguntarnos: ¿qué ganamos al trabajar con los índices? Para responder, debemos analizar en profundidad la biyección.

2.1 Análisis del intervalo $[f^{-1}(n), f(n)]$ en los naturales

Es fácil ver que la información que se pierde al cambiar de representación es una reducción a la mitad del número, ya que nos quedamos con $(n+1)/2$. Sin embargo, este es un resultado trivial que no aporta mucho. Por ello, debemos estudiar el intervalo que perdemos, dado que es el que conecta las funciones $f^{-1}(n)$ y $f(n)$.

Definimos una función g cuyo dominio es el mismo que el de la función inversa f^{-1}

$$g(n) = \{m \in \mathbb{N}:\ f^{-1}(2n-1) \leqslant m \leqslant f(n)\}$$

Tabla d-Cardinal

n	$f^{-1}(n)$	$\#(g(f^{-1}(n)))$
11	6	6
101	51	51
1001	501	501
10001	5001	5001

¿Por qué escogimos los valores $n = 11, 101, 1001, 10001$? Porque nos interesa cuantificar el número de operaciones que se realizan cuando la cantidad de dígitos del número impar aumenta.

Por lo tanto, cuando el número impar pasa a tener 3 dígitos, nosotros ya hemos realizado $\#(g(f^{-1}(101))) = 51$ operaciones utilizando solo 2 dígitos. Sin embargo, aún faltan 48 operaciones más que podemos seguir realizando manteniendo esos dos dígitos.

En general, se tiene que

$$\#\left(g\left(f^{-1}\left(10^k+1\right)\right)\right) = 10^k + 1 - \frac{10^k+2}{2} = 10^k + 1 - 5\cdot 10^{k-1} - 1 = 5\cdot 10^{k-1}$$

Por lo tanto, podemos relacionar la cardinalidad de g(n) para cuantificar las operaciones realizadas con números impares cuando estos aumentan en un dígito. Dado que los números impares aumentan en 2, el número de operaciones es igual a $f^{-1}(n)$.

Cardinalidad de g(n)

$$\#\left(g(n)\right) = 2n - 1 - n + 1 = n$$

Es importante notar que $\#(g(f^{-1}(n))) = f^{-1}(n)$; es decir, la cardinalidad de g(n) es igual al índice, por lo que el índice y el número de operaciones tienen la misma cantidad de dígitos.

La cantidad de operaciones extra que podemos realizar, en comparación con la representación de números impares, la denotaremos por $O(k)$, donde k está relacionada con la cantidad de dígitos del indice.

Formula cerrada para $O(k)$

$$\begin{aligned} O(k) &= 10^k - 5\cdot 10^{k-1} - 2 \\ &= 10^k\left(1 - \frac{5}{10}\right) - 2 \\ &= 10^k\left(1 - \frac{5}{5\cdot 2}\right) - 2 \\ &= 10^k\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= 10^k\cdot\frac{1}{2} - 2 \\ &= 5\cdot 10^{k-1} - 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que la representación mediante índices reduce la complejidad operativa, lo que posiciona a este enfoque como una mejor alternativa para rangos grandes de números.

2.2 Divisibilidad en los indices

Los índices heredan la divisibilidad de los números primos siempre que se considere el valor del primer índice. En general, se tiene que:

$$x \equiv f^{-1}(p) \ \ mód \ \ p, \ \ p \geqslant 3$$

Sea $p \geq 3$ primo impar.

El índice de p es:

$$f^{-1}(p) = \frac{p + 1}{2}.$$

Un múltiplo impar de p es de la forma $(2m-1)p$ con $m \geq 1$.
Su índice es:

$$f^{-1}((2m-1)p) = \frac{2mp - p}{2}.$$

Restamos los índices:

$$\frac{2mp - p}{2} - \frac{p + 1}{2} = \frac{2mp - 2p}{2} = \frac{2p(m-1)}{2} = p(m-1).$$

Como $p(m-1)$ es múltiplo entero de p, tenemos:

$$f^{-1}((2m-1)p) \equiv f^{-1}(p) \ \ mód \ \ p.$$

La regla de divisibilidad del 5 en la representación de los números impares establece que un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5. Esta misma regla se puede traducir a la representación de los índices si resolvemos las siguientes ecuaciones: $a - 3 = 0$ y $b - 3 = 5$, de donde obtenemos $a = 3$ y $b = 8$. Por lo tanto, cualquier índice que termine en 3 o 8 corresponde a un múltiplo de 5.

2.3 Análisis del intervalo $(f^{-1}((2m+1)\cdot 3), f^{-1}((2m+3)\cdot 3))$ en los naturales

Un resultado elemental respecto a la densidad de los múltiplos de 3 en el conjunto de números impares es igual a ⅓. Por lo tanto, podemos filtrar pares de índices candidatos a ser números primos, lo cual implica una mayor eficiencia en la búsqueda.

El par de índices está dado por el intervalo $(f^{-1}((2m+1)\cdot 3), f^{-1}((2m+3)\cdot 3) = (3m+2, 3m+5)$, con lo que se obtiene el siguiente par de índices: $3m+3$ y $3m+4$. En otras palabras, los índices de los números primos son de la forma $3m+3$ o $3m+4$; un resultado elemental de la teoría de números, pero expresado en la representación de índices.

2.3.1 Operatividad optima

La pregunta que surge después de realizar distintas optimizaciones a la criba de Eratóstenes es: ¿hasta qué punto estas optimizaciones pueden perjudicar la eficiencia operativa? Para responder, necesitamos la función $\varphi(n)$ de Euler aplicada al concepto de "ruedas". Una rueda se basa en el producto de primos; por ejemplo, la rueda-2 elimina los múltiplos de dos, por lo que solo quedan los impares. La rueda-6 elimina los múltiplos de 2 y 3, dejando únicamente los números de la forma $6n-1$ y $6n+1$.

Definición de $\varphi(n)$

$$\varphi(n) = \#\left(\{m \in \mathbb{N}: 1 \leqslant m \leqslant n \ \ y \ \ mcd(m, n) = 1\}\right)$$

Si bien trabajar con ruedas que incorporen cada vez más primos elimina una mayor cantidad de números compuestos, lo que implica que la densidad de números primos sea mayor en el conjunto de candidatos, esto no se traduce necesariamente en una mejora de la eficiencia operativa para una persona que busque primos con lápiz y papel.

Mediante $\varphi(n)$ podemos identificar los números coprimos con un n fijo, lo que permite conectar la función φ de Euler con el concepto de ruedas, dado que ambos mecanismos generan, en esencia, conjuntos de números candidatos a ser primos.

Para determinar el número de formulas que genera una rueda-k, necesitamos calcular $\varphi(k)$. Por ejemplo:

rueda-2: $\varphi(2) = \#(\{1\}) = 1$, por lo que hay una formula: $2n+1$.
rueda-6: $\varphi(6) = \#(\{1, 5\}) = 2$, por lo que hay dos formulas: $6n+1$ y $6n+5$.
rueda-30: $\varphi(30) = \#(\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}) = 8$, por lo que existen ocho fórmulas de la forma $30n+c$, donde c es el respectivo coprimo.

En general, para cualquier k de la forma $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p$ (el producto de los primeros primos consecutivos hasta p), calcular $\varphi(k)$ es sencillo si se considera que para un primo p se cumple $\varphi(p) = p-1$. Dado que la función $\varphi(k)$ es multiplicativa, podemos derivar la siguiente fórmula para $\varphi(k)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_m-1) \\
&= p_1\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots p_m\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \\
&= k\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)
\end{aligned}$$

Cotas elementales para φ(k)

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-3) < k\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) \leqslant \frac{k}{2}$$

Podemos concluir que el número de fórmulas para una rueda-k crece de forma factorial, por lo que resulta poco práctico emplear ruedas mayores a 6. Esto se debe a que el esfuerzo cognitivo requerido para moverse entre las distintas listas, verificar la divisibilidad de cada número y tachar sus múltiplos cada p posiciones se vuelve extremadamente intrincado para un ser humano. Por tanto, la rueda-6 se consolida como la opción óptima, ya que mantiene la simplicidad visual de la criba de Eratóstenes.

2.3.2 Implementación de la rueda-6 en los indices

Listas: 3m+3 y 3m+4

m	3m+3	3m+4
0	3	4
1	6	7
2	9	10
3	12	13
4	15	16
5	18	19
6	21	22
7	24	25
8	27	28
9	30	31
10	33	34

La información técnica que podemos extraer de las listas anteriores puede enumerarse de la siguiente manera:

1) El rango de búsqueda está dado por

$$\#\left(\left\{n \in \mathbb{N}:\ f^{-1}(3) \leqslant 2n-1 \leqslant f^{-1}(34)\right\}\right) = 34 - 3 + 1 = 32$$

Donde el 32 se interpreta como la cardinalidad del conjunto de números impares entre 5 y 67. Sin embargo, dado que trabajamos con la rueda-6, hemos eliminado previamente 10 números impares, por lo que nuestro rango efectivo de búsqueda se reduce a 2(m+1).

2) Cota superior

Podemos establecer una cota superior con el tercer índice, a saber, el 6. Por lo tanto, solo basta con seguir tachando los índices de los múltiplos de 5 y 7 hasta $f^{-1}(11^2) = 61$, de modo que los índices que queden sin tachar serán todos primos.

Los índices que son múltiplos de 5 son fáciles de identificar, ya que su último dígito es 3 u 8.

Todo índice en la lista 3m+4 que corresponda a un múltiplo impar de 7 cumple que, al restarle 1, resulta ser un múltiplo de 3. Esto se debe a que el índice base del 7 es 4, y por la propiedad de congruencia en índices, todo múltiplo tiene un índice congruente con 4 módulo 7; al restar 1 se obtiene un número de la forma 3(m+1), que es claramente divisible entre 3. Por lo tanto, para detectar si un índice en 3m+4 es de un múltiplo de 7, basta restar 1 y comprobar si el resultado es múltiplo de 3, aprovechando así la regularidad aritmética de los índices.

En general, se comienza a tachar desde el primer índice del primo en la lista, desplazándose p posiciones de índice en cada paso. Por lo tanto, para las dos listas se cumple que:

Progresión de los indices

$$f^{-1}(p) \; + \; 3 \cdot np, \;\; n \geqslant 1$$

Si $f^{-1}(\mathrm{p})$ y $f^{-1}(\mathrm{p}^2)$ están en la misma lista, se usa la primera progresión; en caso contrario, se usa el primer indice del primo que aparece en la lista.

Listas con los índices de 5 y 7 resaltados

m	3m+3	3m+4
0	3	4
1	6	7
2	9	10
3	12	13
4	15	16
5	18	19
6	21	22
7	24	25
8	27	28
9	30	31
10	33	34

3 La función π(n)

Una pregunta natural que surge al estudiar la criba de Eratóstenes es cómo se distribuyen los números primos en la recta numérica. Este problema fue abordado inicialmente por los matemáticos Carl Friedrich Gauss y Adrien-Marie Legendre, quienes propusieron fórmulas asintóticas; es decir, fórmulas para π(n) tales que el cociente entre π(n) y su aproximación tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

π(n) de Gauss

$$\frac{n}{In(n)}$$

π(n) de Legendre

$$\frac{n}{In(n) - 1.08366}$$

Es importante resaltar que Gauss sabía que su aproximación $\pi(n) \approx n/\ln(n)$,era insuficiente, por lo que en realidad propuso el uso de Li(n) (la integral logarítmica) como una estimación más precisa. Sin embargo, dado que Li(n) no está disponible en calculadoras convencionales, se omitirá en este análisis. Así, trabajaremos únicamente con las fórmulas asintóticas mencionadas anteriormente, las cuales poseen un sustento teórico profundo y se aproximan al valor real de π(n).

Antes de comparar las fórmulas de Gauss y Legendre, debemos definir nuestra propia estimación de π(n), ya que el camino hacia fórmulas que utilizan ln(n) no es directo y requirió, históricamente, de extensas tablas de números primos; un proceso que resta protagonismo al método directo de la criba de Eratóstenes.

Por ello, partiremos de observaciones concretas en el rango de 1 a 200, un intervalo fácil de analizar con nuestra criba de índices, y propondremos a partir de él fórmulas elementales para aproximar π(n) dentro de ese dominio.

Tabla π(20n)

$\pi(1) = 0$	$\pi(10) = 4$	$\pi(20) = 8$	$\pi(40) = 12$
$\pi(60) = 17$	$\pi(80) = 22$	$\pi(100) = 25$	$\pi(120) = 30$
$\pi(140) = 34$	$\pi(160) = 37$	$\pi(180) = 41$	$\pi(200) = 46$

Notemos que la densidad de números primos en la tabla es aproximadamente ¼ Esto es una intuición que puede derivarse de la criba de Eratóstenes y, aunque constituye una observación muy preliminar

sobre la distribución de los primos, nos sirve como punto de partida para intentar modelar $\pi(n)$ mediante una secuencia combinatoria elemental de grado n^3.

$$C(n+2, 3) \text{ vs } \pi(C(n+2, 3))$$

n	$C(n+2, 3)$	$\pi(C(n+2, 3))$	$C(n+2, 3) - \pi(C(n+2, 3))$
1	1	0	1
2	4	2	2
3	10	4	6
4	20	8	12
5	35	11	24
6	56	16	40
7	84	23	61
8	120	30	90
9	165	38	127
10	220	47	173

A partir de la diferencia entre $C(n+2, 3)$ y $\pi(C(n+2, 3))$, obtenemos la secuencia:

$$1, 2, 6, 12, 24, 40, 61, 90, 127, 173.$$

Al consultar la OEIS (Enciclopedia en Línea de Secuencias de Enteros), encontramos que nuestra secuencia se asemeja a A003600[1]:

$$1, 2, 6, 13, 24, 40, 62, 91, 128, 174, \ \ldots$$

cuya fórmula cerrada es:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}.$$

Por lo tanto, hemos encontrado una fórmula que calcula con precisión nuestro margen de error, haciendo que nuestra estimación $\pi(n)$ solo sobrestime en una unidad para $n \leq 220$. Si bien, desde una perspectiva matemática rigurosa, esto podría considerarse una curiosidad numérica, dada la densidad de los primos cumple una valiosa función pedagógica como primera introducción al estudio de su distribución.

Definimos nuestra $\pi(n)$

$$\tau(n) = C(n+2, 3) - A003600(n-1)$$

$\tau(n)$ vs $\pi(n)$

n	$\tau(n)$	$\pi(C(n+2, 3))$	$\pi(C(n+2, 3)) - \tau(n)$
1	0	0	0
2	2	2	0
3	4	4	0
4	7	8	1
5	11	11	0
6	16	16	0
7	22	23	1
8	29	30	1
9	37	38	1
10	46	47	1
11	56	61	5

Nótese que $\tau(n) - \tau(n-1) = n-1$ para $n>2$, lo que implica que nuestra estimación $\pi(n)$ tiene un crecimiento lineal. Por consiguiente, esta aproximación es muy deficiente para representar al $\pi(n)$ real, algo que era de esperar para cualquier fórmula que intente modelar $\pi(n)$ sin emplear logaritmos.

La pregunta que surge al observar que el margen de error es muy amplio es: ¿podemos modificar nuestra estimación $\tau(n)$ para lograr una mejor aproximación? La respuesta es afirmativa, utilizando el teorema de los números primos, que en esencia es la fórmula de Gauss, pero podemos "ocultar" el logaritmo natural en una simple fracción. De este modo, logramos evitar el uso explícito de $n/\ln(n)$.

Nueva definición de $\tau(n)$

$$\tau(n) = \frac{k}{50}\left(C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)\right),\ 3 \leqslant k \leqslant 2$$

Nuestra nueva función $\tau(n)$ se aproxima con un margen de error mínimo en el intervalo de 10^4 a 10^6. Pero, ¿por qué seguir manteniendo la secuencia A003600 si podemos usar una expresión más simple como $2 \cdot C(n+2, 2) - (n-1)$? La razón es didáctica: al conservar ambas secuencias, es más sencillo para el estudiante identificar las similitudes entre ellas. Esta comparación directa será útil más adelante para analizar por qué $\tau(n)$ se asemeja más a la función propuesta por Legendre que a las aproximaciones $n/\ln(n)$ o $n/(\ln(n)-1)$.

Aproximación para el k optimo

$$k \approx \frac{25}{In(n) - 1} + 0.05$$

La idea principal no es que el alumno calcule el valor óptimo de k mediante la fórmula, sino que lo ajuste hasta encontrarlo. Este enfoque hace más intuitiva la aproximación a $\pi(n)$, algo que no se lograría con la simple aplicación de la fórmula $n/\ln(n)$.

$\pi(n)$ vs aproximaciones

$L = 1.08366$

n	$\pi(n)$	τ	k	$n/\ln(n)$	$n/(\ln(n)-1)$	$n/(\ln(n)-L)$
10660	1300	1281	3	1149	1288	1301
20825	2344	2339	2.89	2094	2328	2350
30856	3327	3321	2.76	2984	3304	3334
41664	4359	4348	2.67	3916	4323	4361
50116	5145	5100	2.6	4630	5102	5156
62196	6251	6241	2.56	5634	6196	6248
70300	6967	6950	2.52	6298	6918	6976
82160	8032	8001	2.48	7260	7964	8029
91881	8877	8845	2.45	8039	8810	8882
102340	9802	9777	2.43	8871	9713	9791
113564	10755	10722	2.4	9756	10673	10757
121485	11432	11426	2.39	10376	11345	11435
134044	12498	12456	2.36	11353	12404	12501
142880	13255	13225	2.35	12037	13144	13246
152096	14034	14022	2.34	12746	13912	14019
161700	14824	14785	2.32	13482	14708	14821
171700	15641	15636	2.31	14244	15533	15652
182104	16503	16444	2.29	15034	16387	16511
198485	17863	17852	2.28	16271	17724	17857
204156	18317	18284	2.27	16697	18184	18321

Si bien esta forma de abordar $\pi(n)$ es lúdica y experimental, el proceso de ajustar manualmente el valor de *k* nos permite:

1. Introducir $\ln(n)$ de manera natural, una vez que los alumnos hayan experimentado y comprendido el rol de *k*.

2. Explicar que el valor óptimo de *k* puede interpretarse como la constante de Legendre en su fórmula de aproximación.

3. Lograr una comprensión más profunda de por qué nuestra función $\tau(n)$ se asemeja a la aproximación de Legendre para $\pi(n)$, y no a otras como $n/\ln(n)$ o $n/(\ln(n)-1)$.

Formula para $\tau(n)$ con el valor optimo de k

$$\tau(n) = \frac{1}{50}\cdot\left(\frac{25}{In(n) - 1} + 0.05\right)\cdot\left(C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)\right)$$

$$= \left(\frac{25}{2\cdot 25\cdot\left(In(n) - 1\right)} + \frac{0.05}{50}\right)\cdot\left(C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\cdot\left(In(n) - 1\right)} + 0.001\right)\cdot\left(C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)\right)$$

$$= \frac{C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)}{2\cdot\left(In(n) - 1\right)} + \frac{C(n+2,\ 3) + A003600(n-1)}{1000}$$

Ahora que tenemos la fórmula óptima para $\tau(n)$, podemos entender por qué esta tendía a aproximarse a la $\pi(n)$ de Legendre. Si interpretamos la suma $C(n+2, 3) + A003600(n)$ como $2S(n)$, se tiene que:

$$\tau(n) = \frac{2S(n)}{2\cdot\left(In(n) - 1\right)} + \frac{2S(n)}{2\cdot 500} = \frac{S(n)}{In(n) - 1} + \frac{S(n)}{500}$$

Por lo tanto, ahora sabemos con exactitud que nuestra función $\tau(n)$ se encuentra acotada entre $n/(\ln(n)-1)$ y $n/(\ln(n)-L)$ (donde L es la constante de Legendre). Si bien nuestros ajustes manuales de k son razonablemente precisos, no logran replicar perfectamente la fórmula de Legendre. Cuantos más decimales añadamos a k, más nos aproximaremos a dicha fórmula, pero el proceso se volvería más tedioso que simplemente usar una constante de dos decimales.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Published electronically at https://oeis.org

Palabras clave: Criba de Eratóstenes, Números primos, Educación matemática.

Contacto: math.yasserarath@gmail.com